# 第 16 回：マッチング法

【教科書第 10 章】

北村　友宏

# 本日の内容

1. 平均処置効果

2. 傾向スコア・マッチング

3. 実証分析例

# 処置群への平均処置効果

処置群への平均処置効果（average treatment effect of treated, ATT）は,

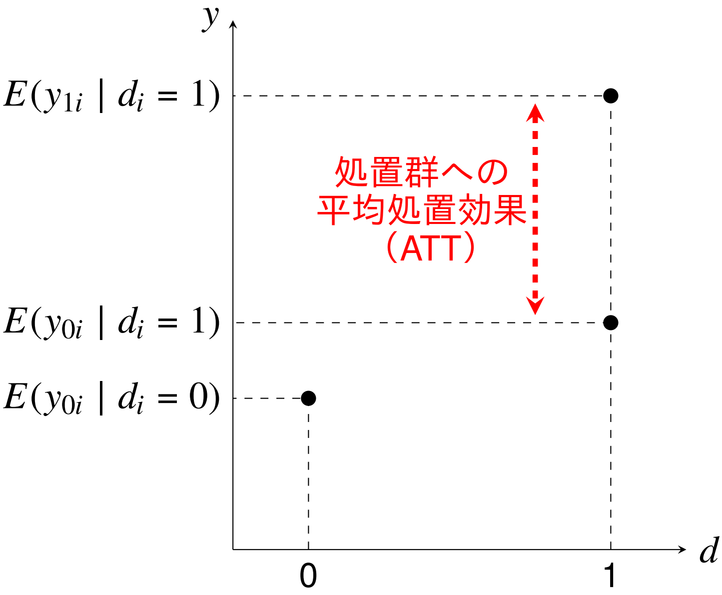
$$ATT = E(y_{1i} \mid d_i = 1) - \underbrace{E(y_{0i} \mid d_i = 1)}_{\text{観測不可能}}. \qquad (1)$$

- $y_{1i}$: 個体 $i$ が処置を受けた場合の結果
  （e.g., 生徒 $i$ が朝食を食べた場合のテストの点数，個人 $i$ が職業訓練を受けた場合の年収，個人 $i$ が大学を卒業した場合の年収など）
- $d_i$: 処置を受けるなら 1, 受けないなら 0 とするダミー変数
  （e.g., 朝食を食べるなら 1，職業訓練を受けるなら 1，大学を卒業するなら 1，など）

- $E(y_{1i} \mid d_i = 1)$: 処置を受けた個体 $i$ が，処置を受けた場合の結果の期待値
- $y_{0i}$: 個体 $i$ が処置を受けなかった場合の結果（e.g., 生徒 $i$ が朝食を食べなかった場合のテストの点数，個人 $i$ が職業訓練を受けなかった場合の年収，個人 $i$ が大学を卒業しなかった場合の年収など）

※ $E(y_{0i} \mid d_i = 1)$ は「処置を受けた個体が，仮に処置を受けなかった場合の結果の（処置を受けたグループ内での）期待値」なので観測不可能.

# 処置群への平均処置効果のイメージ



# 処置群への平均処置効果の推定

- 標本サイズを $n$ とすると，条件付き期待値を標本平均で置き換えて，(1) の処置群への平均処置効果（ATT）を，

$$\widehat{ATT} = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} d_j} \sum_{i=1}^{n} d_i y_{1i} - \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} d_j} \sum_{i=1}^{n} d_i y_{0i}, \quad (2)$$

のように推定する．

$$\Downarrow$$

$d_i = 1$ の（処置を受けた）個体 $i$ に関して，$y_{0i}$ は観測不可能．

$$\Downarrow$$

$d_i = 1$ の個体 $i$ の $y_{0i}$ をどのように求めればよいか？

# マッチング法

- 処置を受けるか受けないかに影響を与える要因を共変量（covariate）という．
- 処置を受けた個体と共変量が似ている個体を，処置を受けなかった個体のグループから探し，両者を比較して ATT を求める方法をマッチング法（matching method）という．
- (2) の $y_{0i}$ には，マッチング法で見つけた，処置を受けた個体 $i$ と共変量が似ている，処置を受けなかった個体を当てはめる．

# 傾向スコア・マッチング

- 観測できる属性から予測される，処置を受ける確率を傾向スコア（propensity score）という．
  - e.g., 職業訓練プログラムへの参加資格を付与するかどうかを決める際に考慮される，年齢，学歴，職歴，家族構成などの属性から，その個人が職業訓練プログラムに参加する確率を推定したもの．
- 傾向スコアに基づいて，処置を受けた個体と共変量が似ている個体を，処置を受けなかった個体のグループから探してマッチング法を実行することを傾向スコア・マッチング（propensity score matching）という．

# 条件付き独立の仮定

- マッチング法における条件付き独立（mean independent）の仮定は，

$$y_{0i} \perp d_i \mid \boldsymbol{x}_i.$$

  - $\boldsymbol{x}_i$ ：共変量ベクトル
  - 「無視可能性の仮定」ともいう.

  ※ 確認することは不可能.

$$\Downarrow$$

共変量を所与として，処置を受けることと「処置を受けなかった場合の結果」が独立.

# 共有サポートの仮定

- 共有サポート（common support）の仮定は，

$$0 < \Pr(d_i = 1 \mid \boldsymbol{x}_i) < 1.$$

$$\Downarrow$$

共変量を所与として，処置を受ける確率は 0%にならず，100%にもならない．

$$\Downarrow$$

それぞれの共変量の値に対して，処置を受ける個体と受けない個体の両方が必ず存在する．

$$\Downarrow$$

処置を受けた処置群の個体にとって，自身と同じ共変量をもつ個体が対照群にもいる．

# 傾向スコア・マッチングの手順

1. 処置を受けるなら 1 とするダミー変数（が 1 になる確率）を被説明変数，共変量を説明変数とする 2 値応答モデル（e.g., 2 値プロビット・モデル）を推定する．
2. 処置を受ける確率（傾向スコア）を予測する．
3. 傾向スコアの数値が近い個体同士で，処置を受けた個体の結果の平均と処置を受けていない個体の結果の平均を比較する（二標本検定や重回帰分析なども行えば，より統計的に説得力のある分析になる）．その際に，共有サポートの仮定が満たされているかどうかを確認する．

- 教科書では，前スライドの 3. の作業について，傾向スコアの分布を参考に，傾向スコアでいくつかの階級に分け，階級内で ATT を推定する方法が紹介されている．
- 傾向スコアの数値が近い個体同士をマッチングさせる，より高度な方法としては，以下の方法などがある（詳細な説明は省略）．
  - マハラノビス距離を用いる方法
  - 完全マッチング
  - 最近傍マッチング
  - 半径マッチング
  - カーネル・マッチング

# 実証分析例：大卒プレミアムの推定

- 大卒プレミアム（大学を卒業した人と卒業していない人で年収にどの程度の差があるか）を推定したい.
- もともと能力が高く，年収も高くなる傾向のある人たちが大学を卒業しているのなら，大学に行くことで年収が高くなったのではなく，大学の効果とはいえない.

$$\Downarrow$$

- 大学を卒業する「確率」が近い人たち同士で，大卒の人とそうでない人の間での年収を比較する.

この分析では，以下のように設定する．

- 処置を受ける = 大学を卒業する
- 処置群：
  - 大卒の人
- 対照群：
  - 大卒でない人
- 共変量：
  - 父親が大卒であるかどうか
  - 兄弟姉妹数

4371 人分のデータを用い，まずは以下の 2 値プロビット・モデルを推定し，大学を卒業する確率（傾向スコア）を推定する．

$$cograd_i = \begin{cases} 1 & \text{if } cograd_i^* > 0, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

$$cograd_i^* = \beta_0 + \beta_1 pacograd_i + \beta_2 sibs_i + u_i,$$

$$u_i \mid pacograd_i, sibs_i \sim N(0, 1).$$

この 2 値プロビット・モデルの別の表現は，

$$\begin{aligned} &\Pr(cograd_i = 1 \mid pacograd_i, sibs_i) \\ &\qquad = \Phi(\beta_0 + \beta_1 pacograd_i + \beta_2 sibs_i). \end{aligned}$$

- $cograd_i$: 大卒ダミー
  - 大卒＝ 1
  - 大卒でない＝ 0
- $pacograd_i$: 父親大卒ダミー
  - 父親が大卒＝ 1
  - 父親が大卒でない＝ 0
- $sibs_i$: 兄弟姉妹数
- $\Phi(.)$: 標準正規分布の累積分布関数

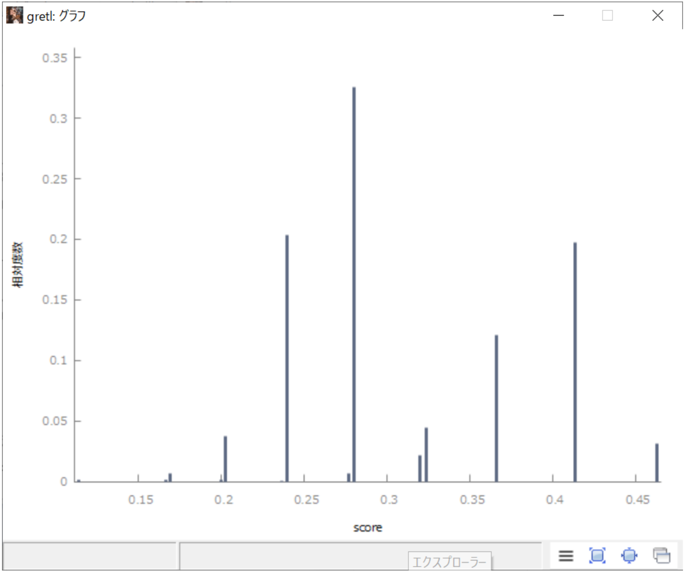
# 2 値プロビット・モデル推定結果

gretl: モデル1

ファイル　編集(E)　検定(T)　保存(S)　グラフ(G)　分析(A)　LaTeX

```
モデル 1: プロビット・モデル, 観測: 1-4371
従属変数: cograd
QML standard errors

                係数        標準誤差       z          限界効果
  -----------------------------------------------------------
  const      -0.457935    0.0426156    -10.75
  pacograd    0.365014    0.0406174      8.987     0.130774
  sibs       -0.124992    0.0244741     -5.107    -0.0440612

Mean dependent var    0.312972   S.D. dependent var    0.463756
McFadden R-squared    0.019387   Adjusted R-squared    0.018282
Log-likelihood       -2663.731   Akaike criterion      5333.462
Schwarz criterion     5352.610   Hannan-Quinn          5340.219

「正しく予測された」ケース数 = 3003 (68.7%)
f(beta'x) (説明変数の平均における) = 0.353
尤度比検定: カイ二乗(2) = 105.323 [0.0000]

            予測値
              0      1
  実績値 0  3003      0
         1  1368      0

残差の正規性の検定 -
  帰無仮説: 撹乱項は正規分布に従う
  検定統計量: カイ二乗(2) = 8.89536
  なお、p値(p-value) = 0.0117057
```

# 傾向スコアのヒストグラム



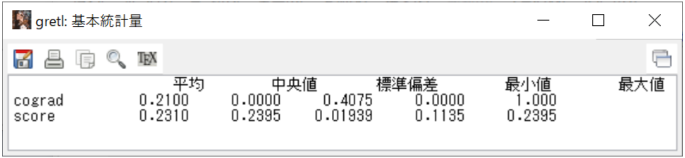
# マッチング

前スライドのヒストグラムを参考に，ここでは，大学を卒業する確率（傾向スコア）で，以下の 4 つの階級に分けて分析する．

- 傾向スコアが 0.24 未満のグループ
- 傾向スコアが 0.24 を超えて 0.29 未満のグループ
- 傾向スコアが 0.29 を超えて 0.4 未満のグループ
- 傾向スコアが 0.4 を超えるグループ

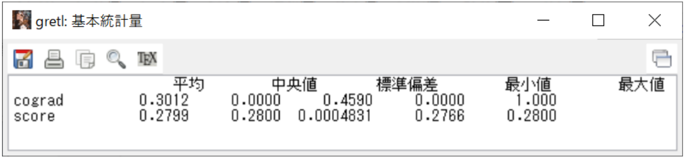
# 共有サポートの仮定の確認（1）

「傾向スコア < 0.24」のグループ




| | 平均 | 中央値 | 標準偏差 | 最小値 | 最大値 |
|---|---|---|---|---|---|
| cograd | 0.2100 | 0.0000 | 0.4075 | 0.0000 | 1.000 |
| score | 0.2310 | 0.2395 | 0.01939 | 0.1135 | 0.2395 |

「0.24 < 傾向スコア < 0.29 未満」のグループ




| | 平均 | 中央値 | 標準偏差 | 最小値 | 最大値 |
|---|---|---|---|---|---|
| cograd | 0.3012 | 0.0000 | 0.4590 | 0.0000 | 1.000 |
| score | 0.2799 | 0.2800 | 0.0004831 | 0.2766 | 0.2800 |

# 共有サポートの仮定の確認（2）

「0.29 < 傾向スコア < 0.4 未満」のグループ

gretl: 基本統計量

| | 平均 | 中央値 | 標準偏差 | 最小値 | 最大値 |
|---|---|---|---|---|---|
| cograd | 0.3545 | 0.0000 | 0.4787 | 0.0000 | 1.000 |
| score | 0.3504 | 0.3658 | 0.02084 | 0.3199 | 0.3658 |

「傾向スコア > 0.4」のグループ

gretl: 基本統計量

| | 平均 | 中央値 | 標準偏差 | 最小値 | 最大値 |
|---|---|---|---|---|---|
| cograd | 0.4094 | 0.0000 | 0.4920 | 0.0000 | 1.000 |
| score | 0.4205 | 0.4137 | 0.01694 | 0.4137 | 0.4630 |

# 共有サポートの仮定の確認結果

※ gretl での出力結果の統計量名と数値の列がズレているので注意.

- どのグループにおいても，cograd の最小値が 0, 最大値が 1.
  $\Rightarrow$ どのグループにも大卒者とそうでない人がいる.
  $\Rightarrow$ どのグループも，共有サポートの仮定が満たされている.

$$\Downarrow$$

続いて，4 つの各グループ内で，大卒者とそうでない人の年収の対数値の平均を比較する.

# 年収の対数値の平均の比較（傾向スコア < 0.24）

gretl: 基本統計量

| | 平均 | 中央値 | 標準偏差 | 最小値 | 最大値 |
|---|---|---|---|---|---|
| cograd | 1.000 | 1.000 | 0.0000 | 1.000 | 1.000 |
| lincome | 5.768 | 5.858 | 0.5753 | 2.526 | 6.908 |
| score | 0.2318 | 0.2395 | 0.02033 | 0.1135 | 0.2395 |

gretl: 基本統計量

| | 平均 | 中央値 | 標準偏差 | 最小値 | 最大値 |
|---|---|---|---|---|---|
| cograd | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| lincome | 5.145 | 5.298 | 0.8652 | 1.833 | 7.226 |
| score | 0.2308 | 0.2395 | 0.01914 | 0.1135 | 0.2395 |

大卒者とそうでない人の年収の対数値（lincome）の平均の差は,

$$5.768 - 5.145 = 0.623.$$

# 年収の対数値の平均の比較（0.24 < 傾向スコア < 0.29）

gretl: 基本統計量

| | 平均 | 中央値 | 標準偏差 | 最小値 | 最大値 |
|---|---|---|---|---|---|
| cograd | 1.000 | 1.000 | 0.0000 | 1.000 | 1.000 |
| lincome | 5.806 | 5.858 | 0.5701 | 3.219 | 7.296 |
| score | 0.2799 | 0.2800 | 0.0004748 | 0.2766 | 0.2800 |

gretl: 基本統計量

| | 平均 | 中央値 | 標準偏差 | 最小値 | 最大値 |
|---|---|---|---|---|---|
| cograd | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| lincome | 5.250 | 5.329 | 0.7784 | 1.833 | 7.226 |
| score | 0.2799 | 0.2800 | 0.0004868 | 0.2766 | 0.2800 |

大卒者とそうでない人の年収の対数値（lincome）の平均の差は,

$$5.806-5.250=0.556.$$

# 年収の対数値の平均の比較（0.29 < 傾向スコア < 0.4）

gretl: 基本統計量

| | 平均 | 中央値 | 標準偏差 | 最小値 | 最大値 |
|---|---|---|---|---|---|
| cograd | 1.000 | 1.000 | 0.0000 | 1.000 | 1.000 |
| lincome | 5.588 | 5.704 | 0.8269 | 1.833 | 6.908 |
| score | 0.3541 | 0.3658 | 0.01933 | 0.3199 | 0.3658 |

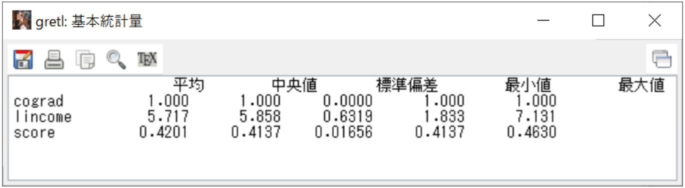
gretl: 基本統計量

| | 平均 | 中央値 | 標準偏差 | 最小値 | 最大値 |
|---|---|---|---|---|---|
| cograd | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| lincome | 5.080 | 5.298 | 0.8320 | 1.833 | 7.048 |
| score | 0.3484 | 0.3658 | 0.02137 | 0.3199 | 0.3658 |

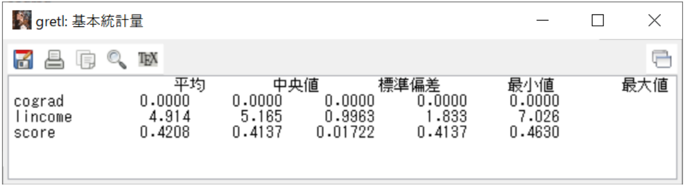
大卒者とそうでない人の年収の対数値（lincome）の平均の差は,

$$5.588 - 5.080 = 0.508.$$

# 年収の対数値の平均の比較（傾向スコア > 0.4）


gretl: 基本統計量

| | 平均 | 中央値 | 標準偏差 | 最小値 | 最大値 |
|---|---|---|---|---|---|
| cograd | 1.000 | 1.000 | 0.0000 | 1.000 | 1.000 |
| lincome | 5.717 | 5.858 | 0.6319 | 1.833 | 7.131 |
| score | 0.4201 | 0.4137 | 0.01656 | 0.4137 | 0.4630 |


gretl: 基本統計量

| | 平均 | 中央値 | 標準偏差 | 最小値 | 最大値 |
|---|---|---|---|---|---|
| cograd | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| lincome | 4.914 | 5.165 | 0.9963 | 1.833 | 7.026 |
| score | 0.4208 | 0.4137 | 0.01722 | 0.4137 | 0.4630 |

大卒者とそうでない人の年収の対数値（lincome）の平均の差は,

$$5.717 - 4.914 = 0.803.$$

# 確認：自然対数値の差

$$\ln y_1 - \ln y_0 \approx \frac{y_1 - y_0}{y_0}.$$

（証明は省略）

$$\Downarrow$$

自然対数値の差は変化率（を近似したもの）を表す.

# 各グループの対数年収の平均と大卒プレミアム

| 傾向スコア | 大卒の対数年収 | それ以外の対数年収 | 大卒プレミアム |
|---|---|---|---|
| 〜0.24 | 5.768 | 5.145 | 0.623 |
| 0.24〜0.29 | 5.806 | 5.250 | 0.556 |
| 0.29〜0.40 | 5.558 | 5.080 | 0.508 |
| 0.40〜 | 5.717 | 4.914 | 0.803 |

※ ここでいう大卒プレミアム，すなわち大卒者とそうでない人の対数年収の平均の差が，処置群における平均処置効果（ATT）となる．

- 「大卒でない人の対数年収」を，「実際に大学を卒業した人が仮に大学を卒業しなかった場合の対数年収」とみなしている．

- 「傾向スコア $< 0.24$」のグループ
  - 大卒者はそうでない人に比べ，年収が平均的に62.3%高い傾向がある．
- 「$0.24 <$ 傾向スコア $< 0.29$」のグループ
  - 大卒者はそうでない人に比べ，年収が平均的に55.6%高い傾向がある．
- 「$0.29 <$ 傾向スコア $< 0.4$」のグループ
  - 大卒者はそうでない人に比べ，年収が平均的に50.8%高い傾向がある．
- 「傾向スコア $> 0.4$」のグループ
  - 大卒者はそうでない人に比べ，年収が平均的に80.3%高い傾向がある．

$\Rightarrow$ 大学を卒業する確率が近い人たち同士で比べても，大学卒業による年収上昇効果が見られる．

# 今日のキーワード

処置群への平均処置効果，共変量，マッチング法，傾向スコア・マッチング，条件付き独立，共有サポート